

MOTIVAR A LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA PARA HACER MATEMÁTICAS

Inés M. Gómez Chacón, Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Publicado en:



Facultad de Ciencias
Matemáticas
Universidad
Complutense de
Madrid

Federación
Española de
Sociedades de
Profesores de
Matemáticas



MOTIVAR A LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA PARA HACER MATEMÁTICAS

Inés M. Gómez Chacón
Facultad de CC. Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

El proceso de aprendizaje es un proceso profundamente subjetivo: es necesario que la persona desee aprender, que se sienta motivada a ello.

La motivación es lo que determina a hacer algo: móvil, impulso, deseo, necesidad, curiosidad... todo lo que despierte el interés.

El principal medio para motivar a los alumnos es que aprendan. Pero no todos se acercan a la escuela con los mismos condicionamientos. En la motivación hacia el aprendizaje tenemos que considerar aspectos muy diferenciados:

- el ambiente socio-cultural del alumno
- la imagen que tienen de sí mismos
- los intereses personales
- los estilos de aprendizaje.

Al analizar las respuestas de los estudiantes, el Informe PISA 2003 (OCDE, 2005) extrae tres datos importantes sobre las actitudes frente al estudio por parte de los alumnos de Secundaria. El primero es que los estudiantes de los diferentes países tienen diversas características auto-identificadas que pueden ayudarlos a aprender. En segundo lugar, el grado en que las diferentes características se asocian con el rendimiento. En tercer lugar, muestran cómo influyen la motivación, las creencias sobre uno mismo y los factores emocionales sobre la adopción de estrategias de aprendizaje eficaces y, de este modo, ayudan a los alumnos a convertirse en estudiantes de por vida.

En este artículo nos centramos en el tema de la motivación de los estudiantes para hacer matemáticas. Para ello, se presentará en primer lugar algunos datos del informe PISA, en un segundo apartado se presentará diferentes aspectos claves a tener en cuenta en un marco teórico sobre la motivación, tratando de dar respuesta a cómo motivar a los alumnos, enunciando varias estrategias y, por último, se presentará una propuesta de trabajo sobre Matemática Realista, describiendo el Proyecto "*Latas de refresco*", junto con las actividades para los alumnos y la guía para el profesorado.

ALGUNOS RESULTADOS DEL ESTUDIO PISA

En el estudio PISA 2003 (OCDE, 2005) se han analizado las características de los estudiantes eficaces, es decir, se ha tratado de responder a la pregunta: *¿Cómo son los alumnos como estudiantes a la edad de 15 años?* En la respuesta se recoge que aquellos que están motivados y seguros de sus capacidades y que normalmente adoptan estrategias de aprendizaje eficaces, suelen obtener mejores rendimientos. No obstante, las actitudes positivas no sólo ayudan a explicar el rendimiento de los alumnos, sino que también son en sí mismas un resultado importante de la educación. Por lo general se considera probable que los alumnos que se han convertido en estudiantes eficaces en el

momento de dejar el centro de enseñanza —especialmente aquellos que han aprendido a regular su propio aprendizaje— sigan aprendiendo a lo largo de toda su vida. PISA 2003 preguntó a los estudiantes sobre cuatro aspectos de su actitud frente al estudio:

- *Su motivación*: si les interesan las matemáticas y disfrutan con ellas, si creen que pueden ayudarles a lograr sus objetivos, si sus sentimientos hacia su centro de enseñanza son positivos y si se sienten parte de él.
- *Sus creencias sobre sí mismos*: cuánto confían en sus capacidades en matemáticas (autoconcepto) y en su capacidad para superar los retos de aprendizaje que les resultan difíciles (autoeficacia).
- *Factores emocionales*: en especial, el grado de ansiedad que sienten a la hora de estudiar matemáticas y
- *Estrategias de aprendizaje*: el grado en que los alumnos memorizan la información nueva, la elaboran pensando en cómo se relaciona con lo que ya han aprendido y controlan su aprendizaje comprobando que alcanzan los objetivos.

Los resultados de los estudiantes españoles han sido bajos (se puede ver en esta publicación el capítulo de Pajares, y Pajares (2005)¹). En este trabajo no nos extenderemos en comentarios de los resultados, sólo se recoge un resumen expresivo de la situación en cuadro 1.

Compromiso y motivación	Creencias	Estrategias de aprendizaje
Interés y satisfacción en matemáticas España: -0.07 [5.1%] OECD: 0.00 [1.5%] ²	Autoconcepto en matemáticas España: -0.19 [13.2%] OECD: 0.00 [10.8%]	Estrategias de control España: -0.02 [2.0%] OECD: 0.00 [0.0%]
Motivación instrumental España: -0.05 [5.1%] OECD: 0.00 [0.7%]	Autoeficacia en matemáticas España: -0.04 [19.4%] OECD: 0.00 [22.7%]	Estrategias de memorización España: 0.07 [0.7%] OECD: 0.00 [0.2%]
Actitudes hacia la escuela España: 0.14 [0.2%] OECD: 0.00 [0.0%]		Elaboración de estrategias España: 0.09 [1.3%] OECD: 0.00 [0.3%]
Sentido de pertenencia a la escuela España: 0.20 [0.1%] OECD: 0.00 [0.1%]		

Cuadro 1: Resultados de estudiantes españoles

¹ Pajares, R. (2005) Short recall on PISA approach to measuring students' approaches to learning En Rico, L. y Recio, T., UGR-ICMI Seminar on PISA03-ES, Carmen de la Victoria (Granada), February 18th and 19th, 2005.

<http://www.ce-mat.org/educ/icmies/pisa-seminar/PISAPajares1.pdf>,

² Índice de valor [porcentaje de varianza].

MARCO DE REFERENCIA PARA LA MOTIVACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Las teorías cognitivas contemporáneas postulan que nuestro comportamiento está influenciado por lo que pensamos. “Pienso” es el factor interno que gobierna la motivación en la persona (Ames y Ames 1984). Esta idea central nos puede dar un marco para estimular a los chicos al aprendizaje de las matemáticas. La motivación está influida por nuestros pensamientos.

Cuando nos acercamos al tema de la motivación nos encontramos distintos conceptos y teorías que lo avalan. Brevemente, destacamos algunos de ellos.

La motivación de logro: es la que tienen los individuos que están motivados para lograr un conjunto de *metas* y se esfuerzan para lograrlas. Holt (1982) distingue entre pensadores (tienen una meta, se involucran en el aprendizaje y aceptan todo el reto que conlleva) y productores (sólo les interesa llegar a la solución correcta).

DeCharms (1984) señala que una estrategia significativa para el desarrollo de la motivación sería que en la escuela se haga hincapié en la motivación de logro, bien mediante programas establecidos o programas diseñados para este objeto o bien incorporando actividades dentro de las disciplinas.

Teoría de la atribución: desarrollada por Weiner (1986), trata de examinar las atribuciones que los estudiantes dan al éxito y al fracaso.

Teoría de evaluación cognitiva: en esa teoría es central que los individuos busquen un cambio de competencia y autonomía. En ella se subraya que la motivación intrínseca aumenta según la relación establecida entre profesor/a y alumno/a.

Teorías socio-culturales: en estas teorías se pone el énfasis en el contexto sensitivo, como componente del sistema que constituyen las emociones y motivación de la persona, y que está en continua evolución en relación a los cambios del contexto social. Los procesos de valoración y de interpretación de los estudiantes que provocan sus afectos y motivación hacia el aprendizaje, están ligados al contexto de aula. Por ejemplo, la presencia del profesor, cómo les mira, los materiales que les proporciona, etc. son objeto de interpretación y valoración, su significado está vinculado a la base de conocimientos y creencias que tiene el alumno como bagaje.

En general, es necesaria una mayor discusión acerca del hecho de que el contexto social a diferentes niveles determina el desarrollo y la naturaleza de los conocimientos, las creencias y motivación del estudiante (Volet, 2001). Por ejemplo, las diferentes categorías de creencias acerca del aprendizaje matemático y la resolución de problemas no sólo están determinados por el contexto de aula, sino que son también factores de influencia la forma de desarrollar las clases y las actividades en las que participa, la cultura familiar, las creencias que sostienen sus padres hacia la matemática, las ideas sociales acerca de la matemática, etc.

¿CÓMO MOTIVAR AL ALUMNO/A?

Muchos autores clasifican la motivación de distintas formas. La motivación puede nacer de una necesidad que se genera de forma espontánea (motivación interna) o bien puede ser inducida de forma externa (motivación externa). La primera, surge sin motivo

aparente, es la más intensa y duradera. Desde este punto de vista la motivación se clasifica en:

- *Motivación Intrínseca*, cuando la persona fija su interés por el estudio o trabajo, demostrando siempre superación y personalidad en la consecución de sus fines, sus aspiraciones y sus metas. Está definida por el hecho de realizar una actividad por el placer y la satisfacción que uno experimenta mientras aprende, explora o trata de entender algo nuevo. La persona explora, tiene una actitud de curiosidad, trabaja por los objetivos de aprendizaje para aprender.
- *Motivación Extrínseca*, cuando el alumno sólo trata de aprender no tanto porque le gusta la asignatura o carrera sino por las ventajas que ésta ofrece. Contraria a la motivación intrínseca, la motivación extrínseca pertenece a una amplia variedad de conductas las cuales son medios para llegar a un fin, y no el fin en sí mismas. Hay tres tipos:
 - o *Regulación externa*: La conducta es regulada a través de medios externos tales como premios y castigos. Por ejemplo: un estudiante puede decir, "estudio la noche antes del examen porque mis padres me fuerzan a hacerlo".
 - o *Regulación introyectada*: El individuo comienza a internalizar las razones para sus acciones pero esta internalización no es verdaderamente autodeterminada, puesto que está limitada a la internalización de pasadas contingencias externas. Por ejemplo: "estudiaré para este examen porque el examen anterior lo suspendí por no estudiar".
 - o *Identificación*: Es la medida en que la conducta es juzgada importante para el individuo, especialmente lo que percibe como escogido por él mismo, entonces la internalización de motivos extrínsecos se regula a través de identificación. Por ejemplo: "decidí estudiar anoche porque es algo importante para mí".

Nuestra propuesta es desarrollar la motivación intrínseca de los estudiantes. Por tanto, en este apartado presentaremos algunas estrategias y técnicas que pueden favorecerlo:

a) *Ayudar a los estudiantes a vivir experiencias de éxito en el aprendizaje matemático:*

1. *Ayudar a generar conocimiento matemático*. Para ello es importante trabajar procesos de pensamiento matemático. Generar conocimiento involucra hacer inferencias y aplicación de ideas, pero también la autorregulación de los procesos de pensamientos. Para una orientación en estos aspectos se puede consultar el libro *Matemática emocional* en la editorial Narcea de esta autora.
2. *Enseñanza de estrategias para la comprensión de ideas y resolución de problemas*; una estrategia es la visualización. Ésto involucra usar imágenes mentales en el pensamiento. Un instrumento interesante es el desarrollo de juegos de estrategias para la enseñanza de heurísticas de resolución de problemas (Mason, y otros (1988), Guzmán (1994 y 1995), Gómez-Chacón (1992)).

b) *Ayudar a los estudiantes a internalizar metas de aprendizaje:*

1. *Usar el aprendizaje cooperativo.* Reseñamos algunos materiales útiles como son: la carpeta de materiales de secundaria *Álgebra en Secundaria. Trabajo cooperativo en Matemáticas* de P. Gavilán editada por Narcea; en ella se presenta una propuesta metodológica de trabajo cooperativo, aplicada a los contenidos curriculares de Álgebra, con atención a la educación en valores y a la diversidad del alumnado. Incluye fundamentos teóricos, orientaciones prácticas para la organización del aula, y abundante material práctico para aprender Álgebra cooperativamente. Y la carpeta de materiales *Matemáticas en la Red. Internet en el aula de Secundaria*, de Gómez Chacón, I. M^a.; Figueiras, L. y Marín, M. editada por Narcea, que contiene una orientación teórica y práctica para el uso didáctico de Internet, a través de Unidades Didácticas y experiencias telemáticas, con actividades que atienden a la diversidad desde un enfoque de colaboración. En esta carpeta se contempla la motivación y desmotivación del alumnado ante la tecnología y se ofrece una amplia información sobre materiales didácticos on-line para el desarrollo curricular de la asignatura. Permite el trabajo conjunto entre partes distintas de la Matemática y con otras áreas curriculares, para favorecer la visión unitaria del conocimiento.
2. *Énfasis en el valor de las matemáticas:* ser consciente del papel que desarrolla en la sociedad, de que es una herramienta para tratar con la vida diaria). Es importante trabajar Curricula que interrelacionen aspectos de Ciencia, Tecnología y Sociedad para mejorar la motivación de los alumnos. En el apartado siguiente presentaremos un módulo de aprendizaje siguiendo el enfoque de Matemática Realista. Este tipo de modelos de desarrollo del currículo permite proponer secuenciaciones basadas en los conocimientos previos del alumnado, en su lógica o en sus intereses. Una buena referencia bibliográfica es el libro de Garfunkel, S. et al. (Consortium for Mathematics and its Applications) (1999), *Las matemáticas en la vida cotidiana* (Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid) y VV.AA (1998) *Matemáticas para nuestro tiempo*. Cuadernos de Aula Secundaria, editado por la Consejería de Educación y Deportes de Canarias.
3. *Preguntar cuestiones abiertas que ayuden a reflexionar sobre el propio pensamiento, y en situaciones de resolución de problemas.*

c) *Ayudar a los alumnos y alumnas en la experiencia de autonomía y responsabilidad.*

Colaborar a la alfabetización emocional de los estudiantes en matemáticas. La persona alfabetizada emocionalmente es aquella que ha desarrollado la inteligencia emocional y las competencias afectivas y que tiene muy en cuenta los sentimientos y emociones propias y ajenas. La alfabetización emocional engloba habilidades tales como el control de los impulsos y fobias en relación a las áreas de conocimiento (lo cual permite desarrollar la necesaria atención para que se logre el aprendizaje), la autoconciencia, la motivación, el entusiasmo, la perseverancia, la empatía, la agilidad mental, etc. Es decir, la competencia emocional o afectiva constituye una meta-habilidad que determina el grado de destreza que alcanzaremos en el dominio de todas nuestras facultades.

De cara al desarrollo de *competencias emocionales* de los estudiantes en matemáticas nos parece importante centrarnos en las siguientes áreas de competencia:

- *autoconsciencia*: reconocimiento de reacciones emocionales y sentimientos, temperamento y estilo de aprendizaje.
- *autorregulación*: control de los impulsos, organización y utilización
- *ansiedad*: modificar la conducta neurótica (ansiedad) caracterizada por un miedo excesivo a cometer faltas, un pánico importante cuando falla la memoria y una ignorancia sobre cómo persistir en la resolución de problemas. Al ser una conducta neurótica se asocia a una disminución en el grado de atención, a la interferencia en la recogida de información desde la memoria y a una menor eficacia en el razonamiento.
- *relaciones o interacciones*: habilidades sociales, trabajo en equipo y toma de decisiones.

Ayudar a los estudiantes a ser consciente de su propia dinámica de aprendizaje es incrementar su competencia emocional y dar apoyo al desarrollo de autonomía y responsabilidad. De acuerdo con este proceso hemos establecido una serie de objetivos y fases, tanto para profesores como para estudiantes, en el programa de actuación didáctica-que hemos realizado (Gómez-Chacón, 2000).

PROPUESTA: UN MODULO DE MATEMÁTICA REALISTA

A continuación mostraremos una propuesta para *ayudar a los estudiantes a internalizar metas de aprendizaje*, como estímulo y camino para desarrollar su motivación para hacer matemáticas.

Los problemas de la vida diaria se pueden aprovechar para enseñar matemáticas. La idea es aprender matemáticas aplicándolas. PISA pone en énfasis el medir la capacidad de los alumnos para aplicar conocimientos y habilidades en la vida diaria (por ejemplo, tomar decisiones sobre su propia vida personal, o comprender los problemas mundiales).

Los promotores más conocidos de la Matemática Realista son un grupo de profesores e investigadores holandeses del Freudenthal Institut de la Universidad de Utrecht.

Los principios del Enfoque Realista de la Educación Matemática son los siguientes: prestar mucha atención, por parte del alumnado, a la re-invencción; progresar gradualmente entre diferentes niveles de abstracción; guiarse por el desarrollo histórico-genético, y partir de situaciones reales para desarrollar el aprendizaje matemático.

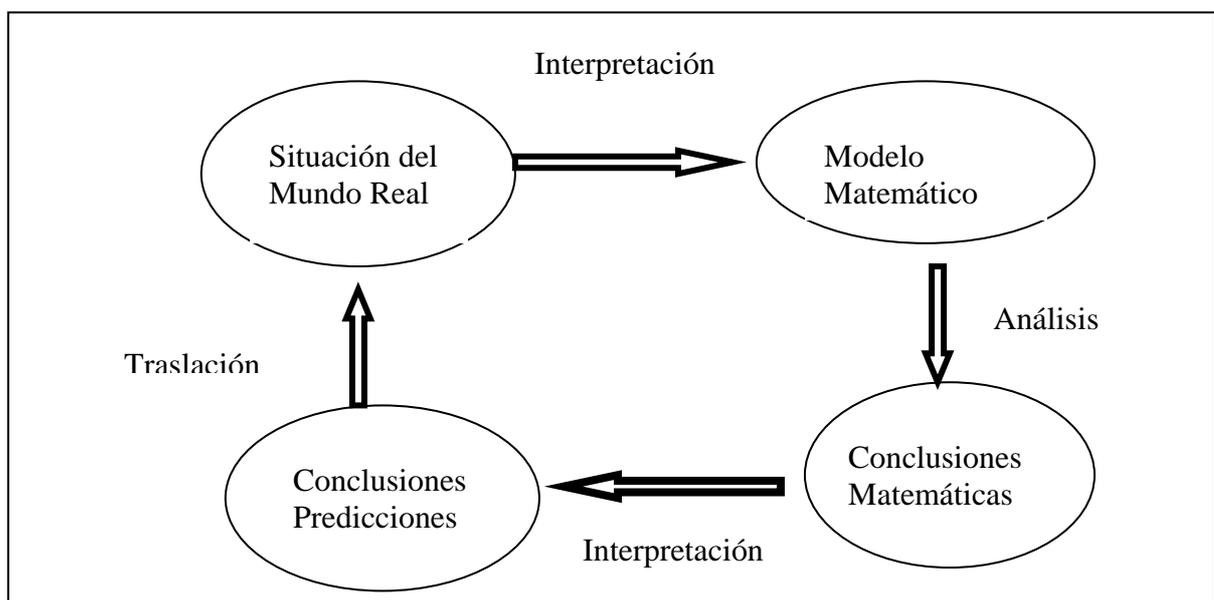


Figura 1: Proceso de Modelización Matemática

Las actividades que hemos diseñado intentan partir de cuestiones del entorno, de forma que el proceso de resolución de problema por parte del alumno pase, a ser posible, gracias a la Modelización y la re-inención guiada.

La modelización matemática es el proceso de describir en términos matemáticos un fenómeno real, obteniendo resultados matemáticos y la evaluación e interpretación matemáticas de una situación real. La Figura 1 puede expresar este proceso.

El proceso de modelización matemática se puede describir en varios pasos. Para alumnos como los de Secundaria, el número de pasos puede ser mínimo:

1. Identificar un problema real.
2. Identificar factores importantes y representar estos factores en términos matemáticos.
3. Usar análisis matemáticos para obtener resultados matemáticos.
4. Interpretar y evaluar los resultados matemáticos y ver cómo afectan al mundo real.

A los estudiantes de Secundaria, una vez que han hecho la experiencia, se les puede explicar el cuadro de la Figura 1 y desarrollar un debate con ellos sobre qué implican los procesos de modelización para que se apropien del proceso. En algunos casos, la dificultad que se detecta con estos alumnos es que tienden a resistirse a la simplificación, exclamaciones como: “pero qué hay que hacer ahora...” son muy comunes. Es importante mantener la discusión, es decir ayudar a la re-inención guiada. Normalmente, los procesos de modelización son una sombra de la realidad. No obstante, para alentar el trabajo de los estudiantes conviene hacer alguna introducción histórica de modelos que han ayudado al avance de la historia y de los fenómenos científicos: predicciones de desastres, viajes espaciales, etc...

Pasamos a presentar un ejemplo de módulo de aprendizaje.

PROYECTO: MODELANDO EL EMPAQUETADO DE LATAS DE REFRESCOS



Esta es una actividad que ha estado inspirada en los materiales de Mathematics: Modeling Our World: Course 2, desarrollado por el Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP). Fue trabajada con los alumnos que se preparan para profesores de Matemáticas, en la asignatura Metodología Matemática, de la Facultad de CC. Matemáticas

de la Universidad Complutense en el curso 2004-2005³.

Nuestro objetivo dentro del programa era que los alumnos para profesores adquirieran la competencia del diseño de Unidades Didácticas y Módulos de aprendizaje desde el enfoque Realista de la Matemática.

La descripción del proyecto queda descrita en los siguientes puntos:

- Presentación del proyecto
- Actividades para el alumnado según profesiones.
- Guía para el profesor

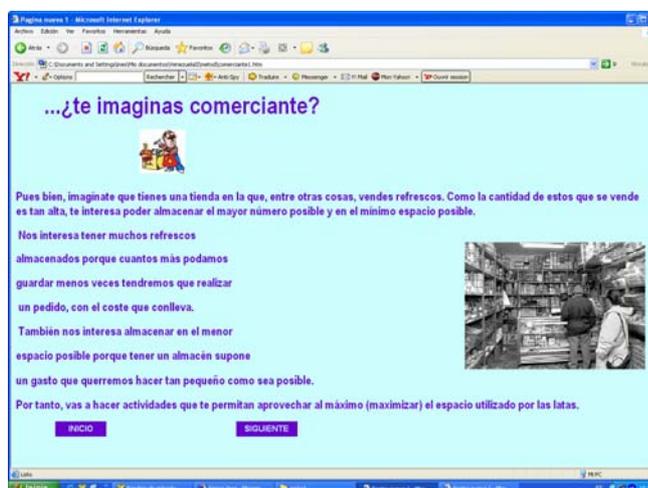
1. Presentación del proyecto

Este modulo de aprendizaje tiene como objetivo trabajar contenidos de geometría. Para ello hemos tomado el tópico **Latas de refresco** y hemos elegido tres profesiones: un comerciante, un fabricante y un publicista⁴. Se pone de manifiesto la matematización que surge en los distintos problemas que se les plantean a estos profesionales en relación a las latas de refresco.

Es un módulo de aprendizaje para ser utilizado a partir de un nivel de 3º de ESO. Cada alumno (o grupo de alumnos) puede identificarse con uno de los profesionales y resolver los problemas que se plantean. Después se puede hacer un debate entre todos los alumnos de la clase donde se pongan de manifiesto los distintos puntos de vista según profesionales y los modelos matemáticos que se generan. En la guía del profesor se harán sugerencias sobre metodologías a trabajar.

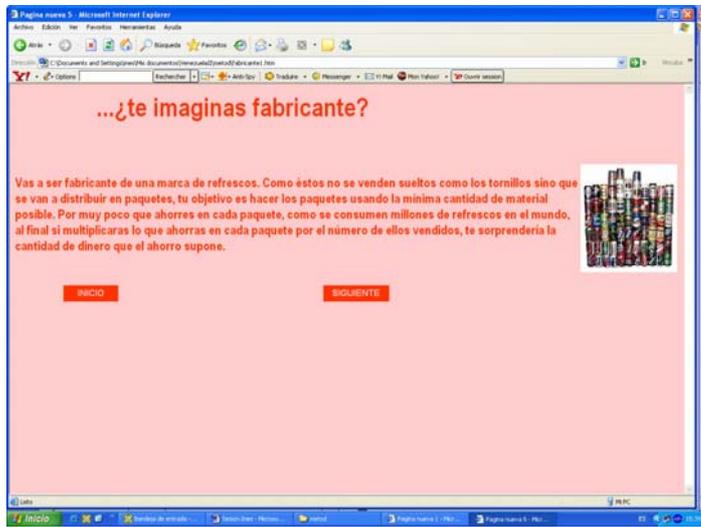
A continuación se explicitan los contenidos según las profesiones planteadas en el desarrollo del módulo.

Comerciante: en esta sección vemos algunos cálculos elementales de geometría, como son áreas de rectángulos y de circunferencias y volúmenes de paralelepípedos y de cilindros. Además, también se trabajan proporciones y se les introduce el concepto de búsqueda de la optimización, del aprovechamiento máximo del espacio. Un aspecto importante de los contenidos es la matematización de los problemas que surgen, con sus consiguientes simplificaciones.



³El proyecto tiene un formato WebQuest. La metodología del modelo WebQuest está orientada a la indagación e investigación guiada en Internet. En el diseño de esta actividad para WebQuest trabajaron las alumnas: Beatriz Hernández y Elena Gimenez.

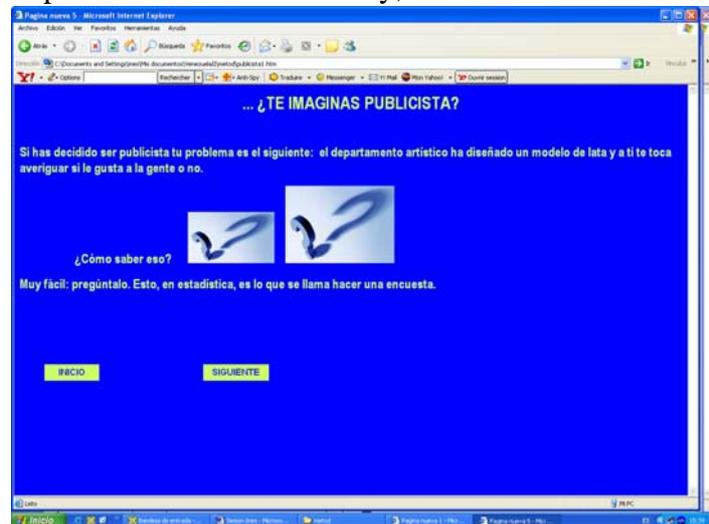
⁴ El proyecto desarrollado está en archivo adjunto en Html.



Fabricante: los alumnos que opten por esta profesión, trabajarán, esencialmente, los mismos problemas que hay en la sección de comerciante, pero desde otro punto de vista, utilizar el mínimo de recursos, que implicará un mínimo de costes de materiales.

Estas dos profesiones pretenden afianzar conceptos geométricos y relacionarlos entre sí y con la vida cotidiana.

Publicista: en la actividad referida a esta profesión se introducen nociones elementales de estadística, como los contrastes de hipótesis y, dentro de estos, el control de calidad. Hemos tratado de explicar estos conceptos de manera intuitiva y, como con las otras profesiones, partiendo de problemas reales.



En las tres profesiones hay una introducción que justifica los problemas y que esperamos motive a los alumnos, las explicaciones teóricas que hemos considerado necesarias para entender y/o resolver los problemas que se plantean y, por último, el planteamiento de los problemas con la solución explicada, o bien directamente, explicitando el método de resolución de problemas, o bien a través de la explicación de porqué son o no correctas ciertas afirmaciones en unas preguntas tipo test.

En algunos de estos problemas, los alumnos tendrán la posibilidad de ayuda, a través de una guía que les facilitará las fórmulas geométricas necesarias. Esto puede parecer una contradicción con la idea de matematizar, en la que la investigación del modelaje debe hacer llegar a los estudiantes no sólo a la investigación de la situación, sino al contexto matemático y la obtención de la fórmula. No es nuestra intención, hacer algo no realista, sino motivar al alumno, partiendo de unos pre-requisitos de conocimiento matemático, a

ver qué matemáticas se tienen que desarrollar según las situaciones. Estimularles a utilizar nuevas ideas matemáticas, es decir, si no conocen algunos conceptos, se les podría hacer trabajar una de estas profesiones más que las otras.

Los problemas de fabricante y comerciante, si bien están ordenados por dificultad (de más fácil a más difícil), inciden sobre la misma idea y conceptos.

En la profesión de publicista, hemos incluido más proporción de teoría que de problemas. Se le facilita al alumnado la opción de profundizar, en función de las necesidades e inquietudes del alumno.

En las tres profesiones hemos planteado los problemas de tal forma que el alumno, cuando tiene un dato, lo examine, interprete y relacione con el contexto general del problema.

2. Actividades para el alumnado según profesiones

Veamos algunos ejemplos de actividades:

...¿Te imaginas comerciante?



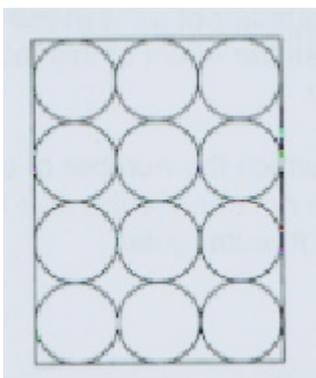
Pues bien, imagínate que tienes una tienda en la que, entre otras cosas, vendes refrescos. Como se vende gran cantidad, estás preocupado en cómo almacenar el mayor número posible de latas y en el mínimo espacio.



Nos interesa tener muchos refrescos almacenados porque cuantos más podamos guardar menos veces tendremos que realizar un pedido, con el coste que conlleva.

También nos interesa almacenar en el menor espacio posible porque tener un almacén supone un gasto que queremos hacer tan pequeño como sea posible. Por tanto, vas a hacer actividades que te permitan aprovechar al máximo (maximizar) el espacio utilizado por las latas.

Problema 1



La siguiente figura representa un paquete de doce latas, visto desde arriba.

a) El radio de una lata de refresco es, aproximadamente, 3'2 cm. Calcula de qué manera utilizan las latas el espacio de este paquete, sin considerar la altura, es decir, del paquete en dos dimensiones, o lo que es lo mismo, calcula el porcentaje de espacio utilizado por las latas.

b) Demuestra que la respuesta del apartado anterior es independiente del tamaño de las latas, es decir, repite el

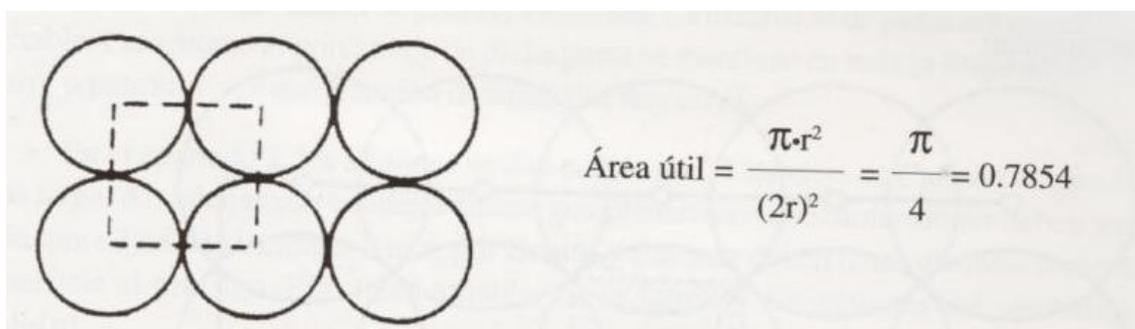
trabajo pero utilizando r para representar el radio.

c) Demuestra que la simplificación de dos dimensiones no afecta al resultado, es decir, encuentra el porcentaje de espacio utilizado por las latas, de radio r y altura h , en el paquete en tres dimensiones. ¿Ya lo tienes?

Para trabajar la solución se puede hacer de distintas formas: mediante un enfoque de proporcionalidad o mediante la necesidad de utilizar un patrón.

La necesidad de utilizar un patrón no es fácil de ver por todos los alumnos; en este caso se puede utilizar el enfoque de proporcionalidad. Se quiere agrupar de tal forma que el espacio desechable sea mínimo. La extensión del espacio útil depende de la cantidad total, que es variable. Pero, como el porcentaje de dicho espacio se mantiene en toda la disposición, puede resultar útil elegir un patrón o trozo y ver qué fracción de masa útil hay en él (Ver Figura 3).

Figura 3: Disposición rectangular con patrón



Guía para el profesor

En este apartado deseamos explicitar algunos comentarios respecto a la tarea de modelización que pueden servir de guía y orientación al profesor para el desarrollo en el aula.

En el Proyecto “*Latas de Refrescos*” se usa la modelización matemática para describir y mejorar la eficacia del envasado y empaquetado de latas de refresco. El primer modelado es el envasado de la lata y el segundo el empaquetado de esas latas.

Actividad de introducción

Se comienza la sesión presentando datos reales actuales que den sentido al proyecto. Para ello, como actividad inicial se debe comenzar *modelando el proceso*. Considerar el impacto que una mejora en el diseño de envases de refresco puede causar. En la actualidad, el consumo de refresco es de gran volumen a nivel mundial. Por tanto, se podría plantear una mejora no sólo para los fabricantes de la misma sino también desde el punto de vista ecológico.

Se podría tomar del Proyecto “*Latas de Refrescos*” el problema 1 de la sección del fabricante que plantea esta situación.

Tal como se presentó en la Fig. 1 el primer paso en el proceso de modelización es identificar el problema real y definir claramente la meta que se desea lograr. Este ejemplo, es bastante eficaz para trabajar con los estudiantes las repercusiones que tiene

un tipo de decisiones u otro. En este caso hay un impacto económico y un impacto medioambiental.

A menudo, el modelaje involucra optimización, es decir, descubrir la mejor forma de hacer algo. Por tanto, se puede introducir este Proyecto planteando a los estudiantes esta situación y formulándoles preguntas del tipo:

- a) ¿El mejor envasado de bebidas es el que deja más espacio disponible al empaquetarlo?
- b) ¿El mejor envasado de bebidas es el que deja más espacio disponible en las estanterías?
- c) ¿El mejor empaquetado de refrescos es el más atractivo para los consumidores?
- d) ¿El mejor empaquetado de refrescos es el que gasta menos material?
- e) ¿El mejor empaquetado de refrescos es el que usa materiales más baratos?

La meta de mejorar el empaquetado es muy amplia. Las primeras cuestiones planteadas son concernientes a maximizar el espacio del envasado utilizando latas y minimizar el material de empaquetado de las latas. Es la problemática que se le plantea en la vida real al almacenista, al transportista y al comerciante; sin embargo, las segundas (o *las últimas* cuestiones) son relativas a la manufactura de latas de refresco, por tanto afecta al fabricante.

Actividades de desarrollo

En el problema 1 de la sección del comerciante, hemos optado por una simplificación. Habitualmente los resolutores de problemas tienen al menos dos razones para usar una simplificación. Una de ellas es por convención –un problema simple es más fácil de manejar y el conocimiento que se deriva de esta situación nos ayuda a resolver situaciones más complicadas–. Lo importante es eliminar situaciones secundarias y no relevantes. Aunque somos conscientes de que a veces la simplificación, aunque favorece la motivación, conlleva riesgos. Además *la cuestión 1c* anticipa los problemas que pueden surgir y muestra que la simplificación a las dos dimensiones no compromete el resultado.

Este problema 1 asume que cuando tomamos un material para hacer el embalado del empaquetado se producen algunos solapamientos. Por tanto, en clase los estudiantes tomaran conciencia que estas situaciones deben ser reexaminadas.

En la *cuestión 3 (a)*, los estudiantes pueden necesitar una referencia: encontrar el porcentaje del espacio del empaquetado de latas requiere conocer el radio de los círculos, áreas de las latas y el área rectangular del paquete total.

El *problema 2 del fabricante* plantea un importante punto: para facilitar las comparaciones, la forma de medir la eficiencia puede modificarse.

Después de resolver las actividades planteadas en este *problema 2*, los estudiantes deberían sentirse ya cómodos con el criterio de modelización, en particular del espacio del envasado usado para las latas y la cantidad de material que se necesita para empaquetar las latas y detectar si el número de latas influye. Los estudiantes deberían tomar conciencia de que en un caso la optimización significa maximizar y en el otro optimizar significa minimizar. Como la actividad está secuenciada, los estudiantes se darán cuenta de que combinar el modelado que la optimización de dos cantidades requieren simultáneamente, es dificultoso.

El propósito del *problema 2 del comerciante* y de los *problemas 3 y 4 del fabricante* es investigar el número de latas como un factor de control cuando el criterio de modelaje es maximizar el espacio y minimizar el material del empaquetado. Los estudiantes verán que el número de latas no es importante como factor para el primer criterio, pero sí lo es en el segundo.

Aunque todas las actividades del *Proyecto* se pueden plantear como trabajo en grupo, estos últimos problemas son especialmente buenos para este tipo de trabajo. Los grupos pueden compartir sus diseños, presentar y defender sus resultados. También, se les puede sugerir la descripción circular.

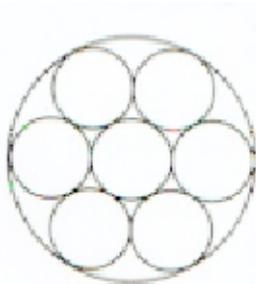


Figura 4: Presentación circular

Si se quiere hacer más compleja la actividad se pueden utilizar programas de dibujo para que los estudiantes hagan sus diseños. Por ejemplo, la Fig. 5 muestra una construcción "*paralelopaquete*". La medida de la eficiencia es la proporción de espacio que se usa para las latas. Aunque el "*paralelopaquete*" no es apropiado para el diseño de los estudiantes por su nivel de dificultad, quizás se le puede proponer una vez que han realizado los *problemas 3 y 4 de la sección del comerciante*.

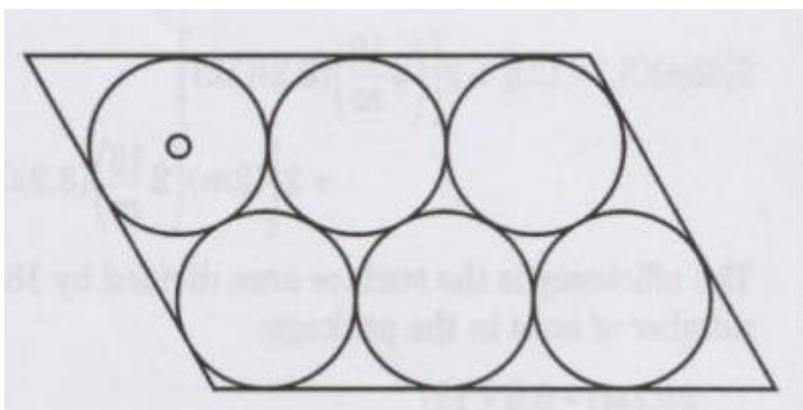


Figura 5: Paralelopaquete

Para ver la eficacia del Paralelopaquete, se calcula:

$$\text{Área de 6 círculos} = 13.51 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del paralelogramo} = 16.88 \text{ cm}^2$$

$$\text{Eficiencia} = 0.80$$

La medida de la eficiencia es la proporción entre el espacio del paquete y el usado por las latas.

Para hacer el desarrollo de esta última actividad se puede trabajar con programas de geometría dinámica como el Geometre Sketchpad. Indicar que estas actividades serían más adecuadas para un nivel de 4º de ESO y de Bachillerato.

Con las cuestiones y resultados que se plantean en la actividad de *idear sus propios modelos de diseño de empaquetado*, los estudiantes no deberían concluir que los procesos de modelaje se han completado. Los resultados necesitan ser interpretados y evaluados, como se indica en el *problema 2 del comerciante* y en el 3 y 4 del fabricante. El profesor puede reforzar este punto pidiendo a los estudiantes que construyan paquetes que piensen que son los mejores. Por ejemplo, ¿El paquete de $3 \times 3 \times 2$ de 18 latas necesita más revestidor que el de $3 \times 6 \times 1$ de 18 latas? ¿El de 18 latas requiere más o menos material que el de 12?

Estos problemas plantean diferentes cuestiones que pueden ser un reto para los estudiantes mejores. Los alumnos pueden analizar algebraicamente la fórmula y describir la eficiencia del paquete rectangular cuando el criterio es minimizar el material usado por lata. Por ejemplo, considerar un paquete rectangular que contenga 18 latas, con m latas de longitud en el lado.

Cuando resuelven estos problemas, los estudiantes normalmente han tenido un éxito parcial con el programa de minimizar y maximizar. Consideran exitoso el identificar el número de latas como un factor importante cuando el criterio es minimizar el material del empaquetado. No obstante, han visto que cambiando el número de latas no ayuda a mejorar la eficiencia cuando el criterio es maximizar el espacio del paquete usado por las latas, con la restricción de usar paquetes rectangulares.

El *problema 3 del comerciante* es relativo al máximo de espacio usado por las latas en el paquete. Antes de comenzar esta actividad, los estudiantes deberían comprender que sus conclusiones matemáticas han mostrado que la identificación del número de latas como un factor de control, cuando el criterio es maximizar el espacio del paquete, es incorrecto. Rechazar esto en el modelado implica descubrir qué otros factores se deben considerar. El propósito de esa actividad es considerar la forma del paquete como factor de control.

Estas actividades no preguntan sobre la minimización del material del paquete, se les puede preguntar a los estudiantes sobre ello.

Si los estudiantes no han trabajado con superficies de áreas cilíndricas, buscando la cantidad de material para el embalado necesario para el paquete, *el problema 3a de la sección del comerciante* puede preparar para esta valoración.

Aunque las respuestas dadas en las cuestiones b y c de este problema son analíticas, las cuestiones mismas no preguntan sobre el tipo de aproximación. Los estudiantes pueden construir figuras, quizás utilizando un programa de dibujo, y una buena calculadora. Esta aproximación sería realista desde una perspectiva del modelado, modelar aplicando tecnología cuando el análisis matemático es difícil.

Se podría continuar este problema planteando cuestiones abiertas que se trabajarían como miniproyecto en grupos.

Como indiqué anteriormente, el trabajo que el estudiante debe realizar en la profesión de publicista, es diferente. En esta sección hemos incluido más proporción de teoría que de problemas. Se le facilita al alumnado la opción de profundizar en una temática diferente como es la Estadística.

Y PARA CONCLUIR

Ha sido nuestro deseo, mostrar instrumentos para trabajar los aspectos motivacionales y afectivos de los estudiantes. Como indicamos en el punto de partida de este capítulo consideramos que el principal medio para motivar a los alumnos es que aprendan. Para ello se ha mostrado un ejemplo, que puede favorecer el proceso de hacer matemáticas. Esto implica en primer lugar que los estudiantes traduzcan los problemas desde el mundo real al matemático. Según el marco teórico del Informe PISA, el proyecto presentado estaría integrado en el tercer nivel de competencia: razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales, trabajando aspectos de modelización horizontal y vertical.

Se ha puesto de relieve la importancia central de la capacidad de generar conocimiento matemático y de ayudar a internalizar metas de aprendizaje en los estudiantes.

El aprendizaje efectivo y la enseñanza efectiva hacen un completo uso de las capacidades naturales e investigadoras que poseen todos los alumnos. Como profesores una pregunta que nos podemos hacer es si estoy haciendo un uso completo de las capacidades de los alumnos, o si estoy intentando hacer todo el trabajo por ellos.

Si me encuentro en lo último se puede esperar un bajo interés compromiso y gusto con y para las matemáticas. Si hacemos lo primero podremos conseguir incrementar el interés, el compromiso y el placer con y para las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONSO, C., GALLEGO, D. y HONEY, P.: 1994, Los estilos de aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora. Mensajero, Bilbao.
- AMES, R. y AMES, C.:1984, Introduction. En R. Ames y C. Ames, Research on Motivation in Education: Vol1. Student Motivation, pp. 1-11. New York: Academic Press.
- COMPAP (Consortium for Mathematics and Its Applications): 1998,. The Right Stuff. En Mathematics: Our World: Course 2. pp. 254-319. Cincinnati, Ohio: South-Western Educational Publishing.
- DeCHARMS, R.: 1984, Motivación enhancement in Education setting. En R. Ames y C. Ames, R. Research on Motivation in Education: Vol1. Student Motivation, pp. 275-310. New York: Academic Press.
- GOMEZ-CHACON, I. M.: 2000, Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático. Narcea, Madrid.
- GUZMÁN, M. de,: 1994, Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. Pirámide, Madrid.
- GUZMÁN, M. de,: 1995, Aventuras matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios. Pirámide, Madrid.
- HOLT, J.: 1982, How Children Fail. Rev. Ed. New York: Delacorte Press/Seymour Lawrence.
- MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K.: 1988, Pensar matemáticamente. MEC-Labor.
- OCDE-PISA: 2005, Informe Pisa 2003. Aprender para el mundo de mañana. OCDE-PISA, Santillana.

- SKEMP, R. 1980, *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Ed. Morata.
- VOLET, S.: 2001, Understanding learning and motivation in context: A multi-dimensional and multilevel cognitive-situative perspective. In S. Volet, & S. Järvelä (Eds.), *Motivation in learning contexts: Theoretical and methodological implications*. A volume in the EARLI/Pergamon "Advances in Learning and Instruction" series. pp. 57-82.
- WEINER, B: 1986, *An attributional theory of motivation and emotion*. Nueva York: Springer-Verlag.