Comparando Fracciones.

Que el Diablo resulte ser perdedor en una contienda con un ser humano, es ya de por sí una situación bastante grave y ominosa para un Diablo, pero ser derrotado en tres ocasiones, es ya un problema que pasa a ser de claro a obscuro, muy obscuro.
Dispuesto a dar un corte definitivo a esta situación anómala, y proponiéndose a sí mismo dar una buena lección al viejo Profesor de Matemáticas y en el mismo terreno de él, optó en esta ocasión por estudiar lo concerniente a las fracciones, y dentro de este tema imaginó que el procedimiento para comparar fracciones, esto es decidir cuál de dos fracciones dadas es mayor, era un buen tema de certamen.
El tema asociado a las fracciones o "quebrados" como se conocían también antiguamente parecía ser un bonito terreno de estudio. Modernamente corresponde a los números racionales y en este vasto capítulo de las matemáticas la relación de orden aplicada allí; como es la relación "mayor que" o "menor que", era una cuestión importante.
Como algoritmo o método para decidir qué fracción es mayor o menor que otra, nuestro apasionado estudioso de las Matemáticas llegó a conocer varios (exactamente un número de once métodos"), algunos de los cuales eran muy poco conocidos y otros, definitivamente inéditos.

En esta oportunidad el Diablo eligió un distinto paraje para realizar sus profundos estudios, no pareciéndole nada mejor que ir al campo, un paisaje llano, de verdes prados y árboles por doquier, para tranquilizar su espíritu, no olvidó completar este cuadro con una buena música orquestada, para ayudar a concentrarse. El estudio profundo realmente requiere de alejarse del "mundanal ruido", según expresión escuchada a los humanos, y en esto parecía que ellos tenían razón, por lo menos en esta opinión le podía dar crédito a ellos; asimismo llevó consigo una canasta bien provista de alimentos adecuados a las circunstancias. ¡También un Diablo necesita alimentarse en forma conveniente!
En esta ocasión no se daría totalmente satisfecho de cualquier avance que pudiera lograr hasta que realmente estuviera en condiciones y sólo bajo estas circunstancias bajaría al Valle donde se encontraba la pequeña Universidad Provincial, en cuyas aulas laboraba el viejo Profesor de Matemáticas.

En esta oportunidad, el Diablo pensaba poner en serios aprietos los conocimientos del Profesor así que apuró sus pasos lo más que pudo para llegar cuanto antes, tan apurado estaba, que hasta olvidó que podía aparecerse allí en las aulas si lo hubiese intentado con sólo hacer un simple chasquido con los dedos.

Llegó finalmente hasta el escritorio, donde el profesor se encontraba trabajando. Sin saludar, el Diablo entró en la habitación y colocó sobre el escritorio una gruesa hoja de papel.

-¿ Sí, mi querido Diablo? - le consultó el viejo Matemático.

-¡ Lee! , fué la lacónica respuesta.

Sobre la gruesa hoja de papel se encontraba escrita con grandes caracteres:

¿ Qué fracción es mayor** $\frac{4}{5}$ **ó** $\frac{3}{4}$ **?

¿ Y qué ocurre de extraordinario con esto? - preguntó nuevamente el Profesor.

" Te desafío a que me muestres todos los métodos que tú conoces para comparar fracciones "¿qué te parece?" - le dijo el Diablo.

" Cada uno de nosotros utilizará un método distinto a la vez, no pudiendo emplearse el mismo a menos que sea con variantes o modificaciones más o menos substanciales."

" Y el que al final no conozca otro método diferente, ése pierde. ¿De acuerdo?

Tomando rápidamente acuerdo se dispusieron entonces a dar inicio al interesante y no menos reñido Certamen.

Como era ya usual en el comportamiento del Diablo para tener ventaja y ganar a su oponente, pidió ser el primero en mostrar su técnica: ya que suponía el Diablo que el total de métodos para comparar fracciones era de once, un número impar, por lo que, al comenzar él, el primero, tendría la ocasión de participar con cualquiera de los nueve métodos, en la primera, tercera, quinta, séptima y novena y última oportunidad.

De esta manera ganaría, y daría una lección al "docto matemático". Ya que éste apenas podría participar con sólo cuatro métodos diferentes.

¿Qué ocurrirá, en el supuesto caso de que ambos intervengamos con el mismo número de métodos y al llegar a ese punto no se pueda continuar la prueba?

¡Entonces tú ganas! - le respondió el Diablo. ¡Tan seguro estaba de vencer...!

Dio comienzo entonces al gran Certamen.

Comparación de las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{3}{4}$

PRIMER MÉTODO:

Diablo : *"observa el procedimiento de reducción a número decimal."*

$$\frac{4}{5} \approx 0{,}80 \quad y \quad \frac{3}{4} \approx 0{,}75$$

y ya que claramente se ve que 0,80 ≥ 0,75 se tendrá, por lo tanto $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$

se concluye que: ***8 es mayor que 7***

SEGUNDO MÉTODO

Profesor*: Muy bien Diablillo, has debutado con la aplicación del concepto de fracción asociado al concepto de división. Está todo perfecto.*

Haré uso de la reducción de las fracciones a otras que tengan el mismo denominador, por un proceso llamado de ***amplificación****:*

" Amplificación o multiplicación por el número UNO, consiste en multiplicar una fracción por cualquier otra fracción que sea equivalente a la unidad por. ej.. : $\frac{2}{2}; \frac{3}{3}; \frac{4}{4}; etc, etc.$

Así la fracción $\frac{4}{5}$ *es equivalente a* $\frac{16}{20}$ *, ya que :* $\frac{4}{5} x \frac{4}{4} = \frac{16}{20}$ *a pesar de estar escritos en forma diferente representan la misma fracción."*

En forma análoga: $\frac{3}{4} x \frac{5}{5} = \frac{15}{20}$

En este caso: amplificamos la fracción $\frac{4}{5}$ *por 4 y la fracción* $\frac{3}{4}$ *por 5 respectivamente obteniendo de este modo:*

$\frac{16}{20} y \frac{15}{20}$ *de donde podemos concluir que :* $\frac{4}{5} = \frac{16}{20} > \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

En donde lo que hemos hecho ha sido **comparar los numeradores**

- *Muy bien, realmente, tu también me sorprendes. Ahora sin embargo, me corresponde a mí, y debuto con la reducción de las fracciones a otras de igual numerador,* ***así compararemos ahora los denominadores*****:**

TERCER MÉTODO

Diablo : *amplificamos* $\frac{4}{5}$ *por 3 y* $\frac{3}{4}$ *por 4 obteniendo de este modo:*

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Ya que en el caso de la segunda fracción el 12 se está dividiendo por un número mayor, en consecuencia, el "cuociente" es menor.

CUARTO MÉTODO:

Profesor : *Restando ambas fracciones y comparando con 0*

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$$

Como el resultado de la resta es mayor que cero, se concluye obviamente que el sustraendo es menor que el minuendo.

QUINTO MÉTODO

Diablo : *Tu presentación me recuerda la resolución de una ecuación de primer grado , que si me lo permites te la mostraré inmediatamente :*

$$\frac{4}{5} + X = \frac{3}{4} \Rightarrow X = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} = \frac{15-16}{20} = \frac{-1}{20}$$

Y ya que la cantidad que se requiere para "convertir" la fracción $\frac{4}{5}$ *en la fracción* $\frac{3}{4}$ *es negativa, de aquí que se concluye que la primera fracción es mayor que la segunda.*

SEXTO MÉTODO

Profesor *: dividiendo una fracción por la otra y comparando con la unidad*

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{4} = \frac{4}{5} x \frac{4}{3} = \frac{16}{15} > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$$

" Se concluye obviamente que el dividendo es mayor que el divisor ya que el resultado de la división ha sido mayor que uno"

SÉPTIMO MÉTODO

Diablo *:Es muy interesante la forma cómo presentas la posibilidad de determinar si un número es mayor o menor que otro, al dividirlos, si el resultado es mayor que la unidad entonces el dividendo es mayor que el divisor, caso contrario, es entonces menor.*
Se me ocurre, visualizarlo también como la resolución de una ecuación, y te mostraré cómo :

$$\frac{4}{5} . X = \frac{3}{4} \Rightarrow X = \frac{3}{4} . \frac{5}{4} = \frac{15}{16} < 1$$

y ya que la fracción es menor que la unidad, esto nos dice que la fracción $\frac{4}{5}$ *se "achica" cuando la multiplicamos por* $\frac{15}{16}$ *transformándola en la fracción menor* $\frac{3}{4}$

Ahora verás un método tan elegante como el que ha sido empleado por ti, aseguró el viejo Profesor : ***" Emplearé logaritmos "***

OCTAVO MÉTODO

Supondré que $\frac{4}{5} \leq \frac{3}{4}$*, y aplicando logaritmos:*

$$\log \frac{4}{5} \leq \log \frac{3}{4}$$

$$\log 4 - \log 5 \leq \log 3 - \log 4$$

$$\log 4 + \log 4 \leq \log 3 + \log 5$$

$$\log 16 \leq \log 15$$

lo que no puede ser ya que siendo log una función creciente y 16 > 15; en consecuencia llegamos a una contradicción, y por ende concluimos que : $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$

NOVENO MÉTODO

Diablo *:Por contradicción o reducción al absurdo que es el mismo método empleado por ti, pero sin apoyarme de una Función creciente para realizar el proceso(en verdad podría hacer uso de cualquier función creciente, e incluso una función decreciente, y sólo siguiendo las propiedades de su comportamiento en relación a la desigualdad)*

Suponemos que la proposición p: " $\frac{4}{5} \leq \frac{3}{4}$ *" es verdadera*

(pero no sabemos si esta proposición es verdadera o falsa)

Después de multiplicar la desigualdad por el ***MCM*** *de los denominadores, es decir por 20 se tendrá a través de un procedimiento correcto:* $16 \leq 15$*, lo que es falso, por lo que :* $\frac{4}{5} \leq \frac{3}{4}$ *es* *falso y por ende* $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ *es verdadero ; todo esto explicado en la siguiente tabla de verdad para la implicación :*

caso	p	Q	p⇒q
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

El proceso para llegar a la conclusión es Verdadero (correcto matemáticamente) es decir $p \Rightarrow q$ *es verdadero : luego los casos posibles pueden ser 1,3 ó 4.*
Pero la conclusión a la que se llegó ; q : "16 $\leq$ *15 " es falsa ; luego los casos posibles pueden ser 2 ó 4.*
Queda entonces como única posibilidad el caso 4.y en consecuencia la proposición p, tiene que ser necesariamente Falsa.
Luego si p: " $\frac{4}{5} \leq \frac{3}{4}$ *" es falsa, entonces su negación, es decir "* $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ *" es verdadera.*
……
Todo lo que mostraba el Diablo, reflejaba realmente un avance notable en el estudio de las Matemáticas, y a cada explicación del Diablo, asentía el Profesor, maravillado.
Verdaderamente el Diablo estaba realizando una exposición que no se podría calificar como excelente, este calificativo no era suficiente en realidad para expresar el amplio dominio y manejo de que estaba haciendo gala el Diablo.

DÉCIMO MÉTODO

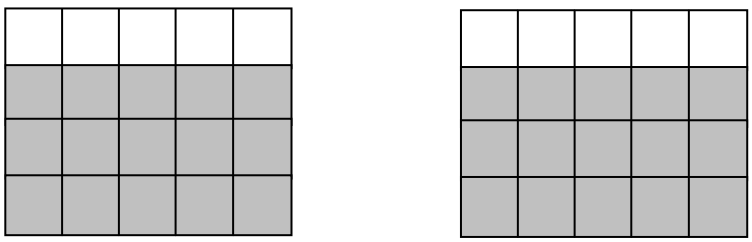
Profesor *: con las fracciones* $\frac{4}{5}$ *y* $\frac{3}{4}$ *formamos la siguiente sucesión :* $\frac{4}{5};\frac{3}{4};\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{0}{1}.....$
y observamos que el último término es igual a cero; concluimos que la sucesión es decreciente, y por lo tanto $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$

Tenía el Diablo ahora la última carta para lanzar sobre la mesa. Con ayuda de este método; el último que él conocía, ganaba la apuesta.

DÉCIMOPRIMER MÉTODO (MÉTODO GRÁFICO)

Diablo : *El método gráfico consiste (el que yo ocuparé por lo menos) en lo siguiente*

4/5



3/4

" Se representa la fracción $\frac{4}{5}$ *en un rectángulo dividiéndolo en cinco partes iguales (líneas verticales) y achurando sólo 4 de ellas. " " En forma análoga se trabaja con la otra fracción:* $\frac{3}{4}$ *; sobre otro rectángulo del mismo tamaño, se divide en 4 partes iguales (líneas horizontales) y se achuran 3."*

Llegado a este punto ya se podría realizar la comparación entre amabas fracciones.

Para lograr una comparación perfecta, el rectángulo asociado a $\frac{4}{5}$ *se divide en cuatro partes (líneas horizontales).mientras que el rectángulo asociado a* $\frac{3}{4}$ *se divide en cinco partes (líneas verticales).*

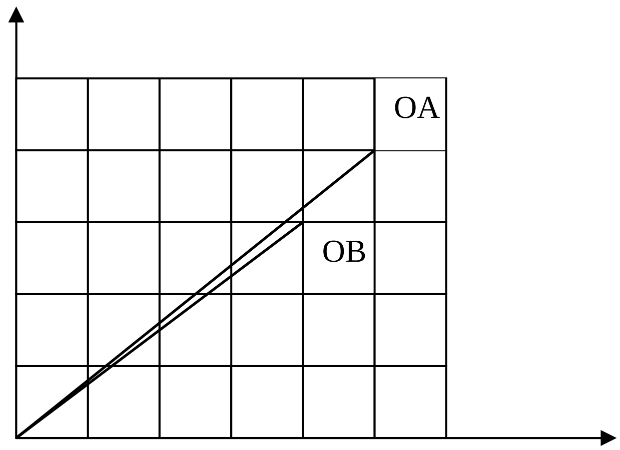
El Diablo ya se estaba dando por satisfecho puesto que pensaba que habían empleado ya todos los métodos conocidos. Y se preparaba ya para burlarse del Profesor. Sin embargo, el viejo Matemático, sabio en recursos, meditó un poco y escribió sobre la Pizarra .

DÉCIMO SEGUNDO MÉTODO. (¿ y último ?)

El método a emplear por el viejo Maestro consistía en el uso de un sistema de coordenadas y del manejo de líneas rectas, asociada cada línea recta a una fracción.Copmparando el ángulo que cada línea reecta hace con el eje horizontal, se podría determinar cuál fracción es mayor.

Profesor: *De este modo: dibujó un sistema de coordenadas horizontal-vertical:*

Relacionando: (5;4) $\leftrightarrow \frac{4}{5}$ *(4;3)* $\leftrightarrow \frac{3}{4}$



Se observa que el segmento OA (que une el punto (0 ;0) con el punto (5 ;4) forma un ángulo mayor con el eje x que el segmento OB, que es el que une el punto (0;0) con el punto(4 ;3).En donde estas fracciones se pueden considerar como las "pendientes " de estos segmentos o de las líneas rectas que pasan por dichos puntos.
Aceptando que esta relación es correcta y teniendo en cuenta algunas condiciones, según las cuales cada fracción podría estar bien representada por un ángulo, y que el tamaño del ángulo es proporcional al tamaño de la fracción, entonces podemos concluir en definitiva que:

$$\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$$

En esta oportunidad, el berrinche de nuestro conocido Diablo no pudo ser mayor.

Tan grande fue su enojo que las ventanas de la sala se abrieron estrepitosamente y la pizarra, de grandes proporciones, cayó haciendo un ruido ensordecedor al chocar con la tarima de la cátedra.

- *¡Volveré ! , prometió el Diablo.*

- *" y en esa oportunidad saldaremos cuentas." - se alejó el diablo dejando tras sí una vez más un viento huracanado y en el aire, flotando una azufrosa promesa de venganza.*

Sin embargo, el Maestro, todavía cerca del Pizarrón y que veía alejarse al Diablo, no pudo sino admirar el tesón y voluntad de éste, que hasta el momento desplegaba en el estudio de las Matemáticas.