Aplicaciones de las Proporciones

Después de las sucesivas derrotas sufridas ante el viejo Profesor de Matemáticas, decidió el Diablo realizar un largo viaje por las amplias aguas del Océano Pacífico. Visitando las innumerables islas, se abocó a asolearse sobre sus doradas arenas, y a descansar bajo la sombra de las hermosas palmeras y a escuchar la deleitable música de esos contornos y también a deleitarse con las hermosas figuras de las hembras humanas de hermosos ojos rasgados que pueblan esos paradisíacos lugares.

En eso estaba, bajo una frondosa palmera, y mirando hacia el horizonte lejano, mientras bebía un aguardentoso Maitai, cuando se le vino a la mente la posibilidad de medir la distancia desde la Tierra a la Luna (1) que por lo temprano de la mañana aún se veía en el firmamento. Todo sería una cuestión de paralaje, pensó. Todo sería una cuestión de trigonometría, o tal vez de una simple aplicación de triángulos semejantes.

¡Proporciones!

¡He allí el tema que andaba buscando para contender con el viejo Profesor de Matemáticas! Y por supuesto: la gran posibilidad, la esperada instancia de hacer sufrir a este Humano una derrota merecida, y al nivel de la humillación sufrida ya por él, en tantas ocasiones de enfrentamiento en este delicado campo que eran las Matemáticas.!

Ni corto ni perezoso nuestro singular Diablo, cultor ya asiduo de las Matemáticas se premunió de innumerables tratados del asunto que le estaba interesando, recocijándose de antemano por lo que el pensaba que sería una cruenta derrota para el viejo Profesor de Matemáticas y para él una sabrosa victoria.

Mientras transcurría su estudio profundo de las proporciones continuó gozando de las amplias aguas del Océano Pacífico practicando esquí acuático en un mágico deslizar por las briosas olas alcanzando las máximas amplitudes de su movimiento ondulatorio.
Sin olvidar de visitar las innumerables y paradisíacas islas alguna vez en un simple bote a remos y otras en un grácil velero. Se abocó a asolearse sobre sus doradas arenas, y a descansar bajo la sombra de las hermosas palmeras y a escuchar la deleitable música de esos contornos y también a deleitarse con las hermosas figuras de las hembras humanas de hermosos ojos rasgados que pueblan esos edénicos lugares, sin olvidar por ningún momento la empresa que estaba acometiendo:

Llegar al punto peak, en su conocimiento de las Proporciones y sus aplicaciones.
¡ El viejo Profesor, lo tendría que recordar por la eternidad, por causa de la derrota que estaría pronto a ocasionarle!

Una vez que el Diablo estuvo a punto en cuanto a su entrenamiento se encaminó a la pequeña Ciudad, donde encontraría al viejo Profesor.

Una vez en la Universidad Provincial donde realizaba el Profesor su trabajo como docente e investigador, el Diablo, expuso a este último, las condiciones en que se realizaría el Certamen, el Tema: Las Proporciones y sus aplicaciones. Exposición de cada una de ellas y comentarios. Evaluación: cantidad y diversidad de exposiciones.

Dio comienzo entonces al Certamen:

PRIMERA INTERVENCIÓN

- ***Diablo: Los porcentajes como un caso particular de proporción. Aplicaciones a los Porcentajes:***

Aprovechando un trabajo realizado con anterioridad en un Certamen anterior muestro ,te presento a continuación la posibilidad de aclarar que el cálculo de un porcentaje es consecuencia de la aplicación de lo que conocemos en Matemáticas como una proporción.

Hay tres tipos básicos de problemas en relación al cálculo de porcentajes, los que describo a través de tres situaciones problemáticas:

1.- Calcular 60% de 80.
2.- ¿Qué porcentaje es 24 de 80 ?
3.- ¿De qué cantidad es 60 el 75% ?

1.- Primer problema: Calcular 60% de 80. Se resuelve, mediante la proporción:

$$\frac{80}{100\%} = \frac{x}{60\%}$$

2.- Segundo problema : ¿ Qué porcentaje es 24 de 80 ?. Se resuelve, mediante la proporción:

$$\frac{80}{100\%} = \frac{24}{X\%}$$

3.- Tercer problema: ¿De qué cantidad es 60 el 75% ? Se resuelve, mediante la proporción:

$$\frac{X}{100\%} = \frac{60}{75\%}$$

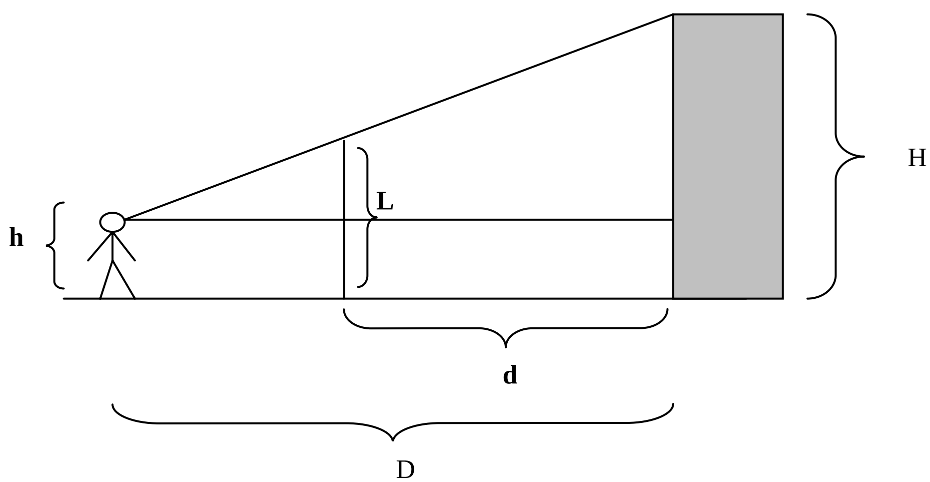
Como se puede observar, mantenemos la siguiente estructura, cada vez que resolvemos un problema de alguno de estos tres tipos:

$$\frac{\text{total}}{100\%} = \frac{\text{parte}}{\text{porcentaje}}$$

SEGUNDA INTERVENCIÓN

- ***Profesor : Propongo el siguiente problema : "Calcular la altura de un edificio."***

Este problema se puede resolver prácticamente si tomo una vara de cierta longitud "L" y la sitúo a una cierta distancia "d" del pié del edificio. Me alejo la distancia "D" que sea necesaria hasta hacer que los puntos extremos superiores tanto del edificio como de la vara coincidan con mi visual. Muestro con un dibujo esta situación:



Se establece a continuación la siguiente proporción que resuelve el problema :

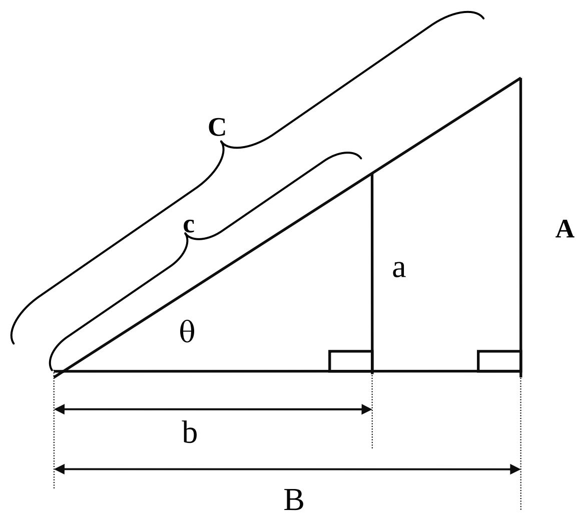
$$\frac{H - h}{D} = \frac{L - h}{D - d}$$

En donde H es la altura del edificio, desconocida.
h : mi altura.
D : la distancia medida desde mi posición al pié del edificio.
d: la distancia entre el pié de la vara y el pié del edificio.
L : longitud de la vara.

Y esta situación es una de las muchas que puede ser resuelta con las proporciones de los lados en un triángulo.

Desarrollo esta idea en una forma más general:

En la Geometría tenemos una amplia gama de situaciones que se explican a través de las proporciones. Así tenemos por ejemplo en el triángulo rectángulo.



En donde se cumplen , entre otras, las siguientes proporciones.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{A}{B}} \qquad \boxed{\frac{b}{c} = \frac{B}{C}} \qquad \boxed{\frac{a}{c} = \frac{A}{C}}$$

Cada una de las cuales se puede re - escribir de ocho maneras distintas.
(hay interesantes nombres en latín para referirse a estos cambios, puedes averiguarlo)

TERCERA INTERVENCIÓN

Diablo : *Esta situación tiene un exhaustivo tratamiento en Trigonometría, donde el caso que tu estás planteando, se corresponde con el concepto de tangente de un ángulo.*
(en un triángulo rectángulo, por supuesto)

Y que en este caso sería:

$$\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

habiendo otras razones trigonométricas, como por ejemplo :

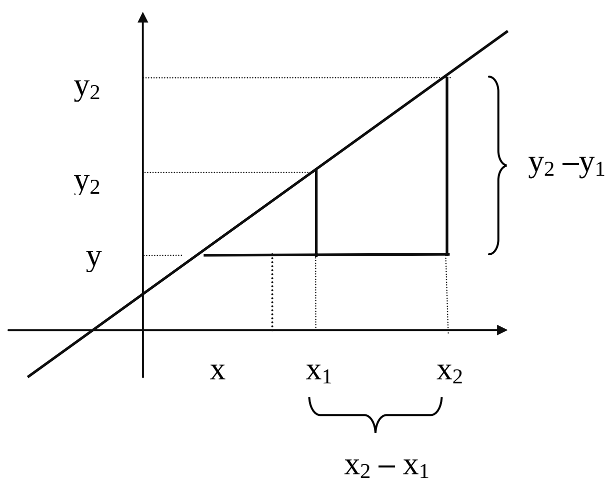
$$\sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{A}{C} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{B}{C}$$

A todo esto la contienda estaba recién cobrando fuerza y vigor. Las expectativas no podían ser mejores para el Diablo, que ya veía tener el dominio absoluto de la situación.

Mientras tanto algunos estudiantes, sabedores de lo que estaba ocurriendo en ese momento en una de las aulas de la Universidad, se habían acercado tímidamente al principio, y ya muchos de ellos estaban ocupando los asientos en primera fila, y haciendo apuestas entre sí.

CUARTA INTERVENCIÓN

Profesor : *Deseo mostrarte la íntima relación existente entre el concepto de proporción y el de línea recta : Para ello primero dibujemos una línea recta en un sistema de coordenadas :*



pendiente = m = tg $\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

de esta manera podemos obtener la ecuación llamada punto- pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$
al reemplazar por:

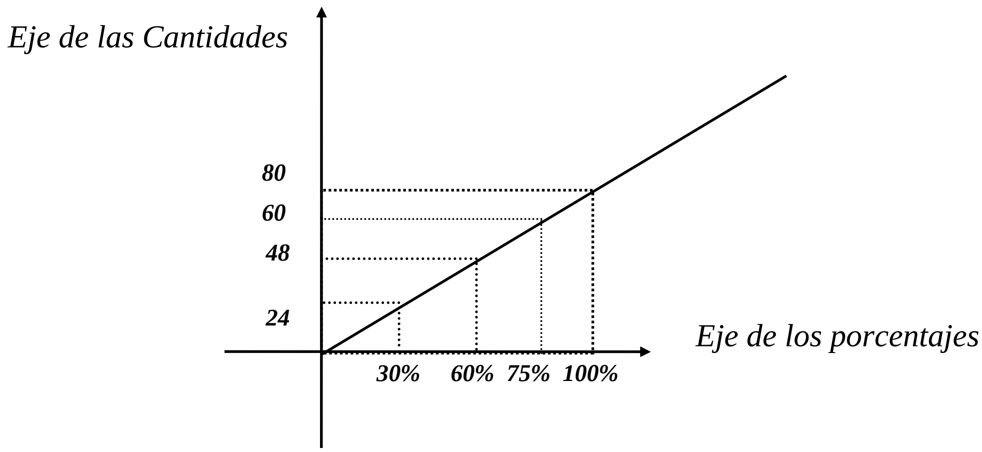
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

He tomado la consideración de la tangente de un ángulo, sin embargo, también es válida la posibilidad de llegar al mismo resultado con el empleo de la proporcionalidad entre los lados de un triángulo rectángulo.

Sin embargo cuando hablamos de cantidades que varían proporcionalmente entre sí, se debe considerar una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

QUINTA INTERVENCIÓN

Diablo :Ya que estás mencionando la línea recta y su ecuación, retomo el problema del cálculo de los porcentajes y planteo una resolución gráfica, para ello:



Si recuerdas, los resultados anteriormente obtenidos los podemos visualizar perfectamente en la gráfica de la línea recta, esto coincide con lo que planteabas recién.

SEXTA INTERVENCIÓN

Profesor: Perfecto, ahora me referiré a una aplicación que encontramos en la Física, o más exactamente en la Mecánica. :

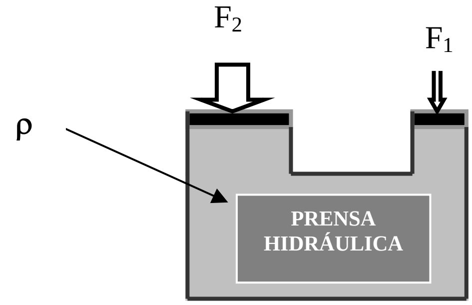
Las proporciones y la Prensa Hidráulica.

En la prensa hidráulica elemental también podemos observar la proporcionalidad, en este caso, y que ilustro con la figura adjunta, se cumple:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

En donde A_1 y A_2 son las áreas de las superficies de los pistones sobre los cuales se aplican las fuerzas F_1 y F_2; respectivamente.

En la prensa hidráulica de la figura: F_1 = 20 [N] A_1 = 0,2 m^2 F_2 = 80 [N]
Entonces A_2 es igual a :



a) 0,8 m^2
b) 0,05
c) 4
d) no se puede determinar, falta densidad del líquido.
e) ninguna anterior.

Nota bene: *ρ es la densidad del fluído al interior de la prensa hidráulica.*

SÉPTIMA INTERVENCIÓN

Diablo : Ya que estás dando ejemplos tomados de la Física, te diré que la proporcionalidad también se presenta en los circuitos eléctricos de resistencias en serie: me refiero a los divisores de tensión:

Doy un sencillo ejemplo de esta situación: un circuito con una fuente ideal de tensión y cuatro resistencias conectadas en serie:

Se puede comprobar en forma práctica y también teórica que el voltaje de la fuente se reparte proporcionalmente entre las cuatro resistencias, de modo que obtenemos los siguientes valores de tensión en cada una de ellas:

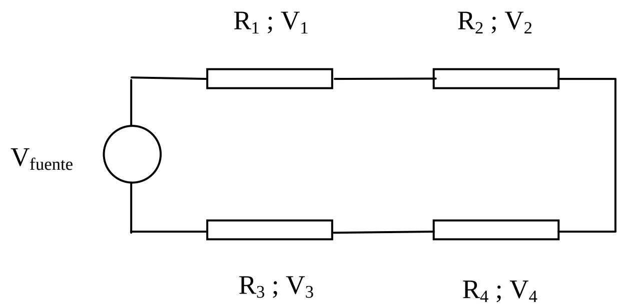
$$V_1 = Vf\cdot\frac{R_1}{(R_1+R_2+R_3+R_4)} \qquad V_2 = Vf\cdot\frac{R_2}{(R_1+R_2+R_3+R_4)}$$

$$V_3 = Vf\cdot\frac{R_3}{(R_1+R_2+R_3+R_4)} \qquad V_4 = Vf\cdot\frac{R_4}{(R_1+R_2+R_3+R_4)}$$

En donde la clave de este asunto está en la proporción :

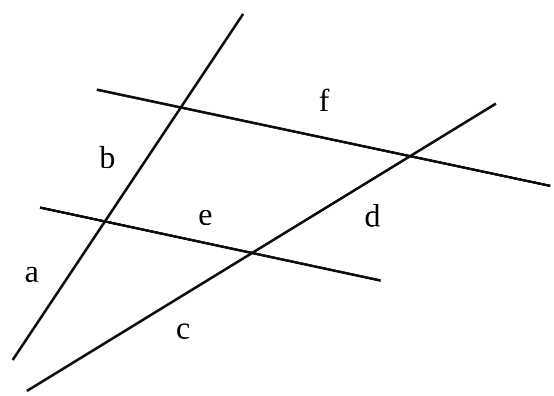
$$\boxed{\frac{V_{resistencia}}{resistencia} = \frac{V_{fuente}}{resistencia,total}}$$

Aquí se muestra el circuito en cuestión:



OCTAVA INTERVENCIÓN

Profesor : Tenemos el Teorema de Thales, en Geometría: con relación a éste consideraré algunas de las proporciones entre los segmentos determinados por dos líneas rectas paralelas que cortan a otras dos.



Así tenemos las siguientes proporciones (entre otras)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{e} = \frac{a+b}{f}$$

Diablo: Todo está bastante claro. La proporcionalidad entre los lados en un triángulo rectángulo es un caso particular de este teorema de Thales que tú estás mencionando.

Siendo el Diablo un conocedor del Cosmos, dado el hecho de sus enormes poderes[(1)] y de su conocimiento adquirido a lo largo de millones de años, por ser casi contemporáneo con la Creación misma que nosotros conocemos, creyó oportuno e interesante plantear algo relativo al Sistema Solar.

NOVENA INTERVENCIÓN

Diablo: **MODELO DEL UNIVERSO EN UN RADIO DE 40 UNIDADES ASTRONÓMICAS**.

Notabene:

Considerando a Plutón**[(2)]** como el Planeta más alejado, y estando éste aproximadamente a $5{,}90x10^{12}$ m; y siendo la U.A. aproximadamente $1{,}49x10^{11}$ m , la distancia media de la Tierra al Sol ; se puede considerar el radio medio del Sistema Solar como de aproximadamente 40 U.A.

Sería interesante construir a escala un modelo del Sistema Planetario.

Teniendo las siguientes medidas:

	Tierra	Luna	Sol
Radio	$6{,}371x10^6$ [m]	$1{,}738x10^6$[m]	$6{,}95x10^8$ [m]

Distancia	Luna	Sol
Tierra	d(T,L) = $3{,}84x10^8$ [m]	d(T,S) = $1{,}49x10^{11}$ [m]

***Simbología a utilizar**: R_T: Radio de la Tierra; R_L : Radio Luna*

R_{BT} : Radio bolita Tierra; R_{BS} : Radio bolita Sol.

Problema 1: *"Si la Tierra fuera del tamaño de una canica (bolita para jugar).¿De qué tamaño sería el Sol (a qué objeto se le podría asimilar) y a qué distancia estarían estos dos objetos representantes respectivamente de la Tierra y del Sol.? "*

[(1)](en comparación con los del Hombre pero muy inferiores por cierto a los poderes de Dios)

[(2)](actualmente se considera a Plutón como un planetoide, cuando se escribió el cuento todavía se consideraba a Plutón como un planeta del sistema solar.)

***Problema 2** : Repetir cálculos considerando a la Tierra y a la Luna.*

***Problema 3** : Repetir cálculos considerando a la Estrella más cercana a la Tierra (después del Sol) "Alpha Centauris" que está a 4 años Luz. Informamos que un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año"*

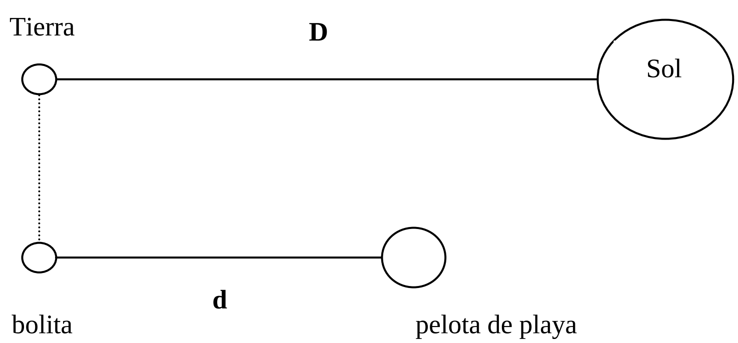
¿ Sería práctico hacer un modelo del Sistema solar a escala (lineal) ?

Resolución, Problema 1:

Con acuerdo a la siguiente proporción:

$$\frac{R_T}{R_S} = \frac{R_{BT}}{R_{BS}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{6{,}371x106[m]}{6{,}95x108[m]} = \frac{0{,}5[cm]}{R_{BS}}$$

$\Rightarrow$ (radio) R_{BS} = 54,54 [cm] ≈ 0,55 [m]; corresponde a una pelota de playa gigante.



El problema de la distancia. Análogamente

$$\frac{R_T}{R_{BT}} = \frac{D}{d} \Rightarrow d = \frac{D \cdot R_{BT}}{R_T}$$

distancia (Tierra ; Sol) = d(T,S) = $1{,}49x10^{11}$ [m]

distancia (bolita ; pelota de playa gigante) = d(b,p) = R_B .D / R_T ≈ 117 [m]

Resumiendo :

Si la Tierra fuera una canica de 0,5 [cm] de radio, el Sol sería una pelota grande de aproximadamente 0,55 [m] de radio, y estarían separadas una distancia aproximada de 117 [m]

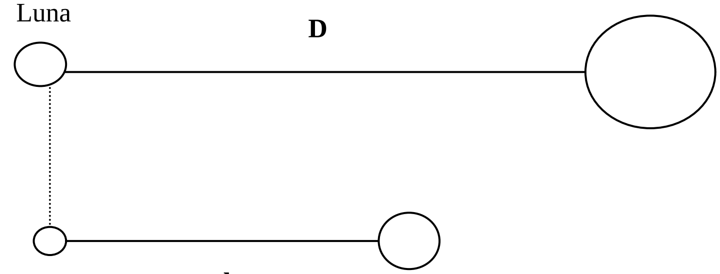
***Problema 2** :*

Con acuerdo a la siguiente proporción:

$$\frac{R_T}{R_L} = \frac{R_{BT}}{R_{BL}} \Rightarrow \frac{6{,}371x10^6[m]}{1{,}738x10^6[m]} = \frac{0{,}005[m]}{R_{BL}}$$

$\Rightarrow$ $R_{BL} \approx 0{,}0014$ [m] ≈ 1,4 [mm] corresponde aproximadamente al tamaño de una cabeza de alfiler de los que se usan para indicar zonas en los mapas.

El problema de la distancia:



El problema de la distancia :

Análogamente $R_T : R_{BT} = D(T,L) : d(BT,BL)$ $\Rightarrow d = R_{BT} .D / R_T$

distancia (Tierra ; Luna) = D(T,L) = $3{,}84x10^8$ [m]

distancia (BT ; BL) = $R_B .D / R_T \approx 0{,}30$ [m] ≈ 30 [cm]

Resumiendo :

Si la Tierra fuera una canica de 0,5 [cm] de radio, la Luna sería del tamaño de la cabeza de un alfiler de aproximadamente 1,4 [mm] de radio, y estarían separadas una distancia de 30 [cm]

***Problema 3** :*

Alpha Centauris está a 4 años luz de la Tierra, es decir: con acuerdo a la relación :

$$v = d / t \Leftrightarrow d = v.t$$

d = 300.000 [km/s] .(4 x 365 x 24 x 3600 [s]) ≈ $3{,}78x10^{16}$ [m]

y utilizando la relación : $d = R_{BT} .D / R_T$, y tomando $D = 3,78x10^{16}$ [m]

se obtiene el siguiente sorprendente resultado : 29.700 [km]

DÉCIMA INTERVENCIÓN

En donde el viejo profesor reconoce la tremenda superioridad del Diablo en cuanto a los conocimientos logrados, y el avance notable mostrado en su intervención.

Profesor: *Realmente me sorprendes Diablillo, en esta intervención tuya muestras avanzados conocimientos y has propuesto* ***un tema además muy hermoso cual es el conocimiento de nuestro Cosmos inmediato.***
Participo ahora con un tema interesante referido a las conversiones de unidades. Gran problema para muchos estudiantes:

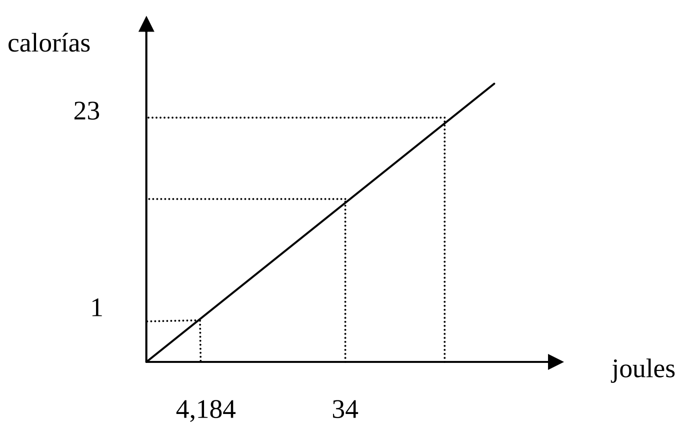
Pensemos por ejemplo, en la equivalencia 1 [cal]= 4,184 [J].
Hay dos situaciones que se pueden presentar, que explicaré a través de dos ejemplos concretos:

- *Determinar a cuántos Joules : [J] equivalen 23 [cal]*
- *Determinar a cuántas calorías equivalen 34 [J]*

Ambas situaciones se pueden resolver a partir de la siguiente proporción:

$$\frac{1[cal]}{4,184[J]} = \frac{x[cal]}{y[J]}$$

Indudablemente que esto es posible porque estas dos cantidades dependen una de la otra en forma directamente proporcional. Lo cual se puede representar muy bien mediante una línea recta:



Notabene: La línea recta pasa por el origen de coordenadas en todos estos casos.

Llegado a este punto de la singular competencia entre el viejo Profesor de Matemáticas y el Diablo, estamos ante una situación que podríamos calificar de tablas. No hay ganador ni perdedor, pero para los efectos de las pretensiones de nuestro querido Diablo, era lo mismo que perder, porque para él, solamente ganar era la única salida a las consecutivas derrotas sufridas por él hasta el momento.

El aplauso de parte de los estudiantes se podría considerar dirigido como un reconocimiento a ambos contendores. La muestra de conocimientos por parte de ambos no podía más que maravillarlos, la lucidez de ambos y las brillantes exposiciones estaban marcando un verdadero hito en la historia académica de la Universidad.

El Diablo por su lado, no estando conforme en lo absoluto, y frustrado a pesar de su brillante esfuerzo, se alejó como siempre malhumorado y con una fuerte determinación que se ponía de manifiesto en las marcas que señalaban su entrecejo: tarde o temprano habría de darle una lección al viejo Profesor de Matemáticas, o dejarían de llamarle Diablo.

Un poco cansado se retiró el Diablo de las aulas no sin antes dejar tras de sí un viento huracanado y polvo de azufre en medio del amplio salón. La pizarra cayó también con un fuerte estrépito, para hacer de su partida algo más espectacular.

Se fue pensando... ¿ es necesario realmente usar proporciones ?
Tal vez podría ser el tema del próximo encuentro.

Nota bene: Para entender lo que estaba elucubrando el Diablo es menester analizar el siguiente problema, que normalmente se resuelve mediante la aplicación de las proporciones:

“Calcular 30% de 70”

Considerando 70 = 100 % y como requerimos del 30%, entonces, y aplicando las propiedades de la igualdad:

$\frac{70}{100} = \frac{100\%}{100}$, después de dividir ambos miembros por 100

$0.7 = 1\%$, multiplicamos ahora por 30

$0.7 \cdot 30 = 1\% \cdot 30$

$21 = 30\%$

luego el 30% de 70 es 21.

No se ha empleado directamente la estructura de una proporción, pero sí la de una línea recta, del tipo y = mx. Queda como tarea para el amigo lector analizar esta situación con más detalles.

Algunas Tareas interesantes para el Lector:

1.- Con acuerdo a los siguientes datos aproximados:

cuerpo	*masa [kg]*	*radio[m]*	*radio de la órbita[m]*	*período de la órbita[m]*
Sol	$1{,}99x10^{30}$	$6{,}95x10^{8}$	----------	----------------
Luna	$7{,}36x10^{22}$	$1{,}74x10^{6}$	$0{,}38x10^{9}$	*27,3 días*
Mercurio	$3{,}28x10^{23}$	$2{,}57x10^{6}$	$5{,}8x10^{10}$	*88,0 días*
Venus	$4{,}82x10^{24}$	$6{,}31x10^{6}$	$1{,}08x10^{11}$	*224,7 días*
Tierra	$5{,}98x10^{24}$	$6{,}38x10^{6}$	$1{,}49x10^{11}$	*365,3 días*
Marte	$6{,}24x10^{23}$	$3{,}43x10^{6}$	$2{,}28x10^{11}$	*687,0 días*
Júpiter	$1{,}88x10^{27}$	$7{,}18x10^{7}$	$7{,}78x10^{11}$	*11,86 años*
Saturno	$5{,}63x10^{26}$	$6{,}03x10^{7}$	$1{,}43x10^{12}$	*29,46 años*
Urano	$8{,}61x10^{25}$	$2{,}67x10^{7}$	$2{,}87x10^{12}$	*84,02 años*
Neptuno	$9{,}99x10^{25}$	$2{,}48x10^{7}$	$4{,}49x10^{12}$	*164,8 años*
Plutón(*)	$5x10^{23}$	$4x10^{5}$	$5{,}90x10^{12}$	*247,7 años*

Responder a las siguientes preguntas:

1.1 *Manteniendo que la Tierra fuera del tamaño de una canica , es decir de 0,5 cm de radio, calcular los radios de los objetos que representarían a cada planeta de los que se dan en la Tabla adjunta y las distancias entre los diferentes objetos representantes de los diferentes astros implicados.*

1.2 *Suponiendo, con respecto al período de la órbita si cada día se representa por un segundo, veríamos a la bolita que representa a Mercurio, en el supuesto Modelo, dar una vuelta completa en 88 seg, es decir poco más de un minuto.*
¿Cuánto habremos de esperar a que Plutón de una vuelta completa?(*)

1.3 *Repetimos la pregunta hecha con anterioridad: ¿Sería práctico construir a* ***Escala Lineal*** *un Modelo del Sistema Planetario?*

1.4 *¿Dadas las grandes distancias que deberían tener entre sí los distintos objetos representantes de los astros en un modelo del Sistema, convendría manejar una* ***escala logarítmica****?*

(*) Según últimos estudios, Plutón no pertenece al sistema solar en calidad de planeta.